HBLW Wels
Lernhilfe Aufnahmeprüfung

I. Stoffdefinition

Das vorliegende Skriptum dient der Vorbereitung zur Aufnahmeprüfung in der HBLW Wels. Folgende Inhalte werden als Grundlagengebiete schwerpunktmäßig in Mathematik geprüft

Höhere Lehranstalt für wirtschaftliche Berufe (5jährig):

- Grundrechnungsarten und Rechengesetze
- Die ganzen Zahlen
- Bruchdarstellung und Bruchrechnen
- Gleichungen
- Prozentrechnen
- Schlussrechnen

wobei sich die Prüfungsaufgaben an den schwierigeren Aufgaben (meist am Ende eines Aufgabenblocks) orientieren und auch Theoriefragen gestellt werden.

Fachschule für wirtschaftliche Berufe (3jährig):
Wie oben, aber mit folgenden „Vereinfachungen“

- Die Kapitel „Doppelbrüche“, „Sonderfälle beim Lösen von Gleichungen“ und „Schlussrechnen“ werden nicht geprüft.
- Es kommen keine Theoriefragen.
- Die Prüfungsaufgaben orientieren sich an den einfacheren Aufgaben (meist am Beginn eines Aufgabenblocks).

Wir hoffen, mit dieser Lernunterlage eine gute Orientierung und Hilfestellung anbieten zu können und wünschen viel Erfolg bei der Aufnahmsprüfung Mathematik!

Das Team der ARGE Mathematik der HBLW Wels.

II. Die Grundrechnungsarten und Rechengesetze

a. Zahlen und Ziffern, Stellenwertsystem, Nomenklatur

Unsere Zahlen bauen sich über ein sogenanntes „Stellenwertsystem“ auf. Das bedeutet, dass wir einzelne Zeichen (hier: „Ziffern“ 0 - 9) kombinieren, sodass nicht nur der Wert der Ziffer, sondern auch ihre Position eine Rolle spielt. In unserer Kultur hat sich dabei ein Zehnersystem durchgesetzt. In der folgenden Tabelle sind die Namen der einzelnen Stellen dargestellt.

Millionen (M)	Hunderttausender (HT)	Zehntausender (ZT)	Tausender (T)	Hunderter (H)	Zehner (Z)	Einer (E)

Jede Zahl baut sich über dieses System auf:

Bsp.: 2411 = 2 T 4 H 1 Z 1 E
94001 = 9 ZT 4 T (0 H) (0 Z) 1 E

Unser Rechensystem bringt auch einige Vokabel mit sich:

<u>Addition:</u>	3	+	2	=	5
	Summand	+	Summand	=	Summe
<u>Subtraktion:</u>	6	-	2	=	4
	Minuend	-	Subtrahend	=	Differenz
<u>Multiplikation:</u>	5	·	3	=	15
	Faktor	·	Faktor	=	Produkt
<u>Division:</u>	24	:	6	=	4
	Dividend	:	Divisor	=	Quotient

b. Rechengesetze

- <u>Klammer vor Punkt vor Strich</u>
  Grundsätzlich müssen alle Rechnungen in Klammern zuerst verarbeitet werden. Bestehen mehrere Klammern, so löse von innen nach außen! Löse außerdem Punktrechnungen (· , :) vor Strichrechnungen.
  Bsp.: $(2 + 3 \cdot 4) \cdot 2 = (2 + 12) \cdot 2 = 14 \cdot 2 = 28$
  Bsp.: $2 \cdot (3 + (5 + 2 \cdot 8) + 3) = 2 \cdot (3 + (5 + 16) + 3) = 2 \cdot (3 + 21 + 3) = 2 \cdot 27 = 54$
- <u>Assoziativgesetz</u>
  Das Assoziativgesetz erlaubt es uns, sinnvolle Pärchen beim Addieren und Multiplizieren zu bilden.
  Bsp.: $12 + \underline{994 + 6} = 12 + 1000 = 1012$ $3401 \cdot 221 \cdot \underline{0 \cdot 1200} = 3401 \cdot \underline{221 \cdot 0} = 3401 \cdot 0 = 0$
- <u>Kommutativgesetz</u>
  Commutare ist Latein und heißt „vertauschen“. So darf man beim Addieren und Multiplizieren die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren umdrehen.
  Bsp.: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$ Bsp.: $3 + 9 = 9 + 3 = 12$
  Aber ACHTUNG: das gilt NICHT beim Subtrahieren bzw. Dividieren! Probiers aus!
- <u>Distributivgesetz</u>
  Distribuare ist ebenfalls Latein und heißt „verteilen“. Dieses Gesetz zeigt uns, wie man Klammern ausmultiplizieren soll.
  Bsp: $\underline{\mathbf{3}} \cdot (4 + 5 - 6) = \underline{\mathbf{3}} \cdot 4 + \underline{\mathbf{3}} \cdot 5 - \underline{\mathbf{3}} \cdot 6 = 12 + 15 - 18 = 9$
- <u>Spezielle Rechenoperationen</u>
  $x \cdot 0 = 0$ (Irgendwas mal 0 ist 0!) $x \cdot 1 = x$ (Irgendwas mal 1 ist das Irgendwas selbst)
  $x : 0 = \ldots$ (durch 0 darf nicht dividiert werden!)

c. Aufgaben

(1) Schreibe als Zahl:

(a) 2M 3HT 2T 1H 3Z	(c) 3 ZT 2Z	(e) 8 HT 3Z 5E
(b) 2 HT 3E	(d) 3 M 4Z 3E	(f) 2 ZT 3T 5Z 2E

(2) Schreibe mithilfe der Stellenwerttafel:

(a) 234000	(c) 931	(e) 1042202
(b) 12502	(d) 1005	(f) 12040

(3) Berechne (ohne TR, wenn möglich) unter Beachtung der Vorrangregeln:

(a) $23 - (2 + 3 \cdot 5)$	(c) $9 + 5 \cdot 3 - (2 \cdot 2 - 3)$	(e) $5 \cdot 9 - 6 + 3 \cdot 6$
(b) $12 \cdot 2 - (2 + 4)$	(d) $23 + 5 \cdot (3 + 2 \cdot 4)$	(f) $(2 + 5 \cdot 2 - 7) \cdot 3$

(4) Berechne vorteilhaft und ohne Taschenrechner – beachte weiterhin die Vorrangregeln:

(a) $284 + 92 + 8$	(c) $23 + 2 \cdot 9 + 42$	(e) $2 \cdot 270 : 27$
(b) $12 \cdot 7 \cdot 0 \cdot 194$	(d) $324 + 523 + 77$	(f) $82 + 73 - 43$

(5) Welche der folgenden Aussagen sind falsch?

(a) $5 + 3 = 3 + 5$	(c) $20 - 12 = 12 - 20$
(b) $21 : 3 = 3 : 21$	(d) $4 \cdot 9 = 9 \cdot 4$

(6) Berechne ohne TR einerseits durch Ausmultiplizieren und andererseits durch Ausrechnen der Klammer!

(a) $12 \cdot (3 + 4 - 5)$	(c) $4 \cdot (12 - 5 + 3)$
(b) $3 \cdot (2 + 6 - 3)$	(d) $10 \cdot (9 - 4 + 12)$

(7) Berechne ohne TR und denke an alle gelernten Regeln!

(a) $23 + (12 - 5 \cdot 2)$

(b) $24 - (7 + 3 \cdot 2) + 12$

(c) $3 \cdot 5 - 12 + (3 + 12 \cdot 3)$

(d) $23 - 13 \cdot 12 \cdot 0 + 5$

(e) $12 + 3 \cdot (15 - 5 \cdot 2)$

(f) $9 \cdot 3 - 5 + 12 \cdot 3 - (2 + 5 \cdot 9)$

d. Lösungen

(1) 2302130 ; 200003 ; 30020 ; 3000043 ; 800035 ; 23052
(2) 2HT 3ZT 4T ; 1 ZT 2T 5H 2E ; 9H 3Z 1E ; 1T 5E ; 1M 4ZT 2T 2H 2E ; 1ZT 2T 4Z
(3) 6 ; 18 ; 23 ; 78 ; 57 ; 15
(4) 384 ; 0 ; 83 ; 924 ; 20 ; 112
(5) b und c sind falsch
(6) 24 ; 15 ; 40 ; 170
(7) 25 ; 23 ; 42 ; 28 ; 27 ; 11

III. Die ganzen Zahlen

a. Addieren und Subtrahieren – Doppelvorzeichen

Am besten erklärt man das Zusammenfassen von Doppelvorzeichen mit Bewegungen auf einem Konto

a + (+ b)	= a + b	„Addieren (+) von Guthaben (+) erhöht den Kontostand (+)“
a + (- b)	= a – b	„Addieren (+) von Schulden (-) verringert den Kontostand (-)“
a - (+ b)	= a – b	„Subtrahieren (-) von Guthaben (+) verringert den Kontostand (-)“
a - (- b)	= a + b	„Subtrahieren (-) von Schulden (-) erhöht den Kontostand (+)“

Beachte dabei folgende Verwechslungsgefahr:
3 – (– 2) = 3 + 2 = 5 (Regel für Doppelvorzeichen) ABER: – 3 – 2 = – 5 (kein Doppelvorzeichen!)

b. Multiplizieren und Dividieren

Die Regeln hier sind fast dieselben wie beim Addieren und Subtrahieren.

(+ a) · (+ b) = + ab	(+ a) : (+ b) = + a : b
(+ a) · (– b) = – ab	(+ a) : (– b) = – a : b
(– a) · (+ b) = – ab	(– a) : (+ b) = – a : b
(– a) · (– b) = + ab	(– a) : (– b) = + a : b

Beachte weiterhin die üblichen Vorrang- und Rechenregeln!

c. Aufgaben

(1) Berechne ohne Taschenrechner (Additionen und Subtraktionen)

(a) (+3) – (+5)
(b) (–3) – (– 5)
(c) (+3) – (– 5)
(d) (– 3) – (+5)
(e) (– 2) + (+7)
(f) (+4) + (– 3)
(g) (– 2) + (– 4)
(h) (+3) – (– 4)
(i) (+12) – (+3)

(2) Berechne ohne Taschenrechner (Multiplikationen und Divisionen)

(a) $(-3)\cdot(+5)$
(b) $(-36):(+3)$
(c) $(-12)\cdot(+4)$
(d) $(+21):(-3)$
(e) $(+75):(-5)$
(f) $(-81):(-9)$
(g) $(+12)\cdot(+10)$
(h) $(+123):(+3)$
(i) $(-25)\cdot(-2)$

(3) Berechne unter Verwendung aller bekannten Rechenregeln

(a) $(-3)+(-3)\cdot(-12)-(-36)$
(b) $[(+6)-(-8)]+[(-3)+(-5)]$
(c) $(-4)\cdot[-2+(-8)]:(-2)$
(d) $12+(-4)-(+21):(-3)$
(e) $(-21):(+3)-[16-(-5)\cdot(+2)]$
(f) $[(-72):(+9)]:(-4)$
(g) $(-2)\cdot(+9)-[(-3)\cdot(-15)+(-5)]$
(h) $(-96):[(-8)+(+4)]\cdot(+6)$
(i) $(-12)\cdot(-5)\cdot(-2)$
(j) $[(+6)-(-8)]+[(+6)+(-3)]$
(k) $[(-5)+(+5)\cdot(-5)]:(-5)+(-5)$
(l) $(+100):(-25)+(+48):(-6)-(-7)$
(m) $(-28):(-7)-(-32):8-(-10)$
(n) $(-12)\cdot(+3)-(-21):(+3)$
(o) $(+8)+(-27):(-3)-(+2)\cdot(-4)$
(p) $(+9)\cdot(-11)-(+13)\cdot(-7)-(-12)\cdot(-8)$
(q) $[(-12)\cdot(+3)-(+12)]:(-6)$
(r) $20\cdot(8+32):(16-12)\cdot 5$

d. Lösungen

(1) -2 ; 2 ; 8 ; -8 ; 5 ; 1 ; -6 ; 7 ; 9
(2) -15 ; -12 ; -48 ; -7 ; - 15 ; 9 ; 120 ; 41 ; 50
(3) 69 ; 6 ; -20 ; 15 ; -33 ; 2 ; -58 ; 144 ; -120 ; 17 ; 1 ; -5 ; 18 ; -29 ; 25 ; -104 ; 8 ; 1000

IV. Bruchdarstellung und Bruchrechnen

a. Bruchdarstellung, Bruch vs. Dezimalzahl

Ein Bruch besteht aus zwei Zahlen (oben: Zähler, unten Nenner) und einem Bruchstrich in der Mitte. Nach Möglichkeit ist die Schreibweise ½ zu vermeiden und $\frac{1}{2}$ zu verwenden, da dadurch die Systematiken (v.a. beim Erweitern und Kürzen) leichter ersichtlich sind.

Der wichtigste Satz zuerst: Jeder Bruchstrich ist gleichzeitig ein Divisionszeichen!
Also ist $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$ $\quad\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}8333\ldots$ $\quad\frac{12}{27} = 12 : 27 = 0{,}444\ldots$

Umgekehrt gibt es einen einfachen sprachlichen Trick – denk an die Zeiten von Skifahrern/Bobfahrern:
0,4 = „4 Zehntel“ = $\frac{4}{10}$ $\quad$ 0,12 = „12 Hundertstel“ = $\frac{12}{100}$ $\quad$ 0,312 = „312 Tausendstel“ = $\frac{312}{1000}$

In einem Bruch nennt man die obere Zahl „Zähler“, die untere „Nenner“! Diese Namen sind wichtig, damit man in mathematischen Formulierungen weiß, von welcher Zahl man gerade spricht.

b. Teilbarkeitsregeln

Manchmal ist es nötig zu wissen, wann eine Zahl durch 2, 3, 4, 5, 6, 9 oder 10 (ohne Rest) teilbar ist. Hier nun die gängigsten Regeln für die Teilbarkeit von Zahlen:
Eine Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre Einerstelle 2, 4, 6, 8 oder 0 ist.
Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist. (z.B. 125 → 1 + 2 + 5)
Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn ihre letzten beiden Ziffern 00, 04, 08, 12, …, 96 sind.
Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre Einerstelle 5 oder 0 ist.
Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist (Regeln siehe oben!).
Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar ist.
Eine Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre Einerstelle 0 ist.

Es gibt auch noch Teilbarkeitsregeln für 7, 11 usw. – die sind aber für die Praxis kaum relevant und werden daher hier aus Platzgründen ausgespart.

c. Kürzen und Erweitern von Brüchen

Merkspruch: „Man darf Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl multiplizieren (erweitern) bzw. durch dieselbe Zahl dividieren (kürzen), ohne dass sich der Wert des Bruches ändert.“
Bsp: $\frac{15}{20} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{18}{24} = 0{,}75$

d. Addieren und Subtrahieren von Brüchen

WICHTIG! Brüche können nur mit gleichem Nenner addiert/subtrahiert werden.
Bsp: $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$(„1 Banane + 3 Bananen sind 4 Bananen, also sind 1 Fünftel + 3 Fünftel = 4 Fünftel“)

Ist das nicht der Fall, so müssen die Brüche zuerst richtig erweitert werden:
$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2\cdot 4}{5\cdot 4} + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20}$

Merke: Einen gleichen Nenner findet man immer, indem man die Einzelnenner miteinander multipliziert! Es ist nicht zwingend nötig (wenngleich aber natürlich „eleganter“), immer den kleinsten Nenner zu finden, da man dann am Ende weniger kürzen muss.

Manchmal findet man in Aufgaben die Darstellung eines gemischten Bruches: Bsp.: $3\frac{1}{2}$ – diese ist zu vermeiden, da man sie mit $3 \cdot \frac{1}{2}$ verwechseln könnte. Du kannst sie auflösen, indem Du die 3 Ganze auch in Halbe verwandelst. 3 Ganze sind 6 Halbe, plus das eine Halbe, das dabeisteht = $\frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

e. Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Merkspruch zum Multiplizieren: „Oben mal oben und unten mal unten“

Bsp.: $\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3\cdot 10}{5\cdot 9}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$

$\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{5}_{1}}\cdot\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{9}_{3}}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}=\frac{2}{3}$

Beachte: Beim Multiplizieren kann „über Kreuz gekürzt werden“ (siehe rechts!)

Merkspruch zum Dividieren: „Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert“. (Kehrwert = Zähler und Nenner eines Bruches vertauschen!)

$Bsp.: \frac{3}{5}:\frac{9}{10}=\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{9}=\ldots(weiter\ wie\ oben)\ldots=\frac{2}{3}$

f. Doppelbrüche

Doppelbrüche sind bei SchülerInnen gefürchtet, aber in Wahrheit einfach eine Verbindung von zwei Rechenregeln, die wir gerade gelernt haben (Bruchstrich = Divisionszeichen, Dividieren von Brüchen).

Bsp.: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.

g. Aufgaben

(1) Schreibe als Dezimalzahl

(a) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{9}{10}$ (e) $\frac{3}{4}$ (g) $\frac{2}{3}$ (i) $\frac{4}{10}$ (k) $\frac{8}{3}$

(b) $\frac{12}{25}$ (d) $\frac{3}{8}$ (f) $\frac{1}{8}$ (h) $\frac{1}{5}$ (j) $\frac{2}{7}$ (l) $\frac{1}{6}$

(2) Schreibe als Bruch und kürze so weit wie möglich

(a) 0,25 (b) 0,9 (c) 0,81 (d) 0,214 (e) 0,512 (f) 0,122

(3) Ist die Zahl durch … teilbar?

Zahl	durch 2?	durch 3?	durch 4?	durch 5?	durch 6?	durch 9?	durch 10?
21							
16							
25							
40							
36							
8							
100							

(4) Kürze so weit wie möglich

(a) $\frac{24}{60}$ (c) $\frac{12}{50}$ (e) $\frac{21}{57}$ (g) $\frac{378}{900}$

(b) $\frac{125}{250}$ (d) $\frac{27}{90}$ (f) $\frac{1240}{3200}$ (h) $\frac{256}{384}$

(5) Erweitere so, dass derselbe Nenner herauskommt

(a) $\frac{1}{2}\ und\ \frac{4}{5}$ (b) $\frac{2}{5}\ und\ \frac{3}{7}$ (c) $\frac{3}{4}\ und\ \frac{8}{9}$ (d) $\frac{1}{5}\ und\ \frac{3}{11}$ (e) $\frac{5}{6}\ und\ \frac{3}{4}$

(6) Ordne folgende Brüche der Größe nach indem Du sie auf einen gemeinsamen Nenner bringst, beginne dabei mit dem kleinsten Bruch!

(a) $\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{3}{10},\frac{3}{4},\frac{2}{20}$ (b) $\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{4}{6},\frac{7}{12}$ (c) $\frac{3}{5},\frac{2}{10},\frac{4}{15},\frac{10}{30},\frac{4}{5},\frac{7}{10}$

(7) Berechne

$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=$	$\frac{1}{6}+\frac{3}{9}=$	$\frac{5}{4}+\frac{7}{6}=$	$4+\frac{2}{3}=$	$\frac{7}{8}+3=$	$4\frac{1}{2}+\frac{4}{5}=$	$2\frac{4}{7}+1\frac{1}{3}=$	$\frac{3}{5}+1\frac{1}{2}=$
$\frac{3}{4}-\frac{2}{7}=$	$\frac{5}{6}-\frac{3}{9}=$	$\frac{2}{7}-4=$	$9-\frac{3}{7}=$	$\frac{5}{4}-\frac{7}{6}=$	$3\frac{4}{7}-1\frac{1}{3}=$	$\frac{4}{5}-1\frac{1}{2}=$	$2\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=$

(8) Berechne und vergiss nicht zu kürzen

$\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{15}=$	$\frac{2}{7}\cdot\frac{6}{35}=$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=$	$9.\frac{3}{7}=$	$\frac{2}{7}.4=$	$3\frac{1}{2}.\frac{4}{5}=$	$\frac{3}{5}.4\frac{1}{2}=$	$5\frac{4}{7}.2\frac{1}{3}=$

(9) Berechne und vergiss nicht zu kürzen

$\frac{5}{3}:\frac{2}{15}=$	$\frac{2}{7}:\frac{6}{35}=$	$\frac{3}{4}:\frac{2}{5}=$	$\frac{2}{7}:4=$	$6:\frac{2}{5}=$	$2\frac{1}{2}:\frac{4}{5}=$	$\frac{3}{5}:3\frac{1}{2}=$	$4\frac{4}{7}:3\frac{1}{3}=$

(10) Löse folgende Doppelbrüche auf

(a) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{3}}$ (b) $\frac{\frac{5}{16}}{\frac{25}{8}}$ (c) $\frac{\frac{35}{49}}{\frac{15}{7}}$ (d) $\frac{\frac{12}{25}}{\frac{32}{15}}$ (e) $\frac{\frac{81}{25}}{\frac{9}{75}}$ (f) $\frac{\frac{84}{3}}{2}$ (g) $\frac{\frac{12}{75}}{\frac{84}{3}}$

(11) Vereinfache so weit wie möglich – denke an die Rechenregeln

(a) $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\right):\frac{4}{5}$

(b) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{6}\right)+1$

(c) $3\frac{1}{3}-1\frac{1}{5}\cdot\left(1\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\right)$

(d) $\left(3-\frac{4}{5}:\frac{8}{10}\right)-2\cdot\frac{3}{5}$

(e) $\left(3\frac{1}{3}-1\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)$

(f) $\frac{8}{5}-\frac{2}{3}\cdot\frac{24}{10}+2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\right)$

(g) $4\frac{3}{8}-1\frac{5}{22}:3\frac{3}{11}+2\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{12}$

(h) $\left(1\frac{1}{2}+3\frac{17}{20}\right)-\left(5\frac{3}{4}-2\frac{2}{5}\right)$

(i) $5\frac{3}{4}-2\frac{1}{3}-2\frac{5}{6}+3\frac{1}{2}-1\frac{1}{12}$

(j) $\left(3\frac{1}{6}-\frac{7}{12}\cdot 4+\frac{1}{4}\cdot 15-2\frac{1}{3}\right):9$

h. **Lösungen**

(1) 0,4 ; 0,48 ; 0,9 ; 0,375 ; 0,75 ; 0,125 ; 0,66... ; 0,2 ; 0,4 ; 0,2857… ; 2,66… ; 0,166…

(2) $\frac{1}{4}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{81}{100}$; $\frac{107}{500}$; $\frac{64}{125}$; $\frac{61}{500}$

(3) n … nicht teilbar, j … teilbar

Zahl	durch 2?	durch 3?	durch 4?	durch 5?	durch 6?	durch 9?	durch 10?
21	n	j	n	n	n	n	n
16	j	n	j	n	n	n	n
25	n	n	n	j	n	n	n
40	j	n	j	j	n	n	j
36	j	j	j	n	j	j	n
8	j	n	j	n	n	n	n
100	j	n	j	j	n	n	j

(4) $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{6}{25}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{7}{19}$; $\frac{31}{80}$; $\frac{21}{50}$; $\frac{2}{3}$

(5) Merke: hier ist nicht zwingend der „kleinste gemeinsame Nenner“ erforderlich, ergo gibt es nicht „DIE Lösung“ sondern unendlich viele korrekte Lösungen.
$\frac{5}{10}$ *und* $\frac{8}{10}$; $\frac{14}{35}$ *und* $\frac{15}{35}$; $\frac{27}{36}$ *und* $\frac{32}{36}$; $\frac{11}{55}$ *und* $\frac{15}{55}$; $\frac{10}{12}$ *und* $\frac{9}{12}$

(6) $\frac{2}{20}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ $\frac{2}{10}, \frac{4}{15}, \frac{10}{30}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}$

(7)

$\frac{23}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{29}{12}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{31}{8}$	$\frac{53}{10}$	$\frac{82}{21}$	$\frac{21}{10}$
$\frac{13}{28}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{26}{7}$	$\frac{60}{7}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{47}{21}$	$-\frac{7}{10}$	$\frac{17}{10}$

(8)

$\frac{2}{9}$	$\frac{12}{245}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{27}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{27}{10}$	13

(9)

$\frac{25}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{1}{14}$	15	$\frac{25}{8}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{48}{35}$

(10) $\frac{9}{32}; \frac{1}{10}; \frac{1}{3}; \frac{9}{40}; 27; 14; \frac{1}{175}$

(11) $\frac{11}{12}; \frac{14}{15}; \frac{14}{15}; \frac{4}{5}; 4; \frac{26}{15}; \frac{21}{4}; 2; 3; \frac{1}{4}$

V. Gleichungen

a. Was ist eine Gleichung?

Eine Gleichung ist eine Rechenanweisung, bei der ein Wert unbekannt ist. Du kennst sicher noch aus der Volksschule folgende Aufgabe: 3 + ____ = 5 mit der Anweisung „3 und wie viel ist 5?“

Nun verwenden wir statt dem _____ halt Buchstaben, die sogenannten Variablen. Meist wird hierfür die Variable x verwendet, es ist aber prinzipiell möglich, jeden Buchstaben/jedes Symbol zu verwenden.

Das Ziel ist es nun, herauszufinden, für welche Zahl die Variable steht – wenn am Ende eine Gleichung wie x = 2 herauskommt, sagt man, die Gleichung ist „gelöst“. Um Gleichungen zu lösen, darf man gewisse Vorgänge anwenden, man nennt sie Äquivalenzumformungen.

b. Wie löst man nun eine Gleichung? – Äquivalenzumformungen

Um eine Gleichung zu lösen, darf man, ohne dabei die Lösungen zu verändern,…:

- … die beiden Seiten einer Gleichung vertauschen (also die Gleichung umdrehen).
- … auf beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren.
- … beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl (aber nicht 0!) multiplizieren / dividieren.

Die alte und die neue Gleichung heißen dann „äquivalent“ (lat.: gleichwertig)!

ACHTUNG: Das Multiplizieren (bzw. Dividieren) einer Seite der Gleichung mit einer Zahl betrifft jedes einzelne Glied. Bsp.: 2x + 4 = 8 würde bei Multiplikation mit 2 auf beiden Seiten 4x + 8 = 16 ergeben!

c. Gleichungen der Form a · x = b

Wir beginnen ganz einfach, um zu zeigen, dass das Lösen von Gleichungen systematisch funktioniert.

3 · x = 12	„Nach der Logik: 3 mal Banane = 12 Euro. Wie viel kostet eine Banane?“
3 · x = 12	/ : 3 (man schreibt den Rechenschritt, den man ausführt, immer auf die rechte Seite!)
$\frac{3\cdot x}{3}=\frac{12}{3}$	/ ausrechnen (Spruch: „Wenn Du etwas ausrechnen kannst, dann TU ES!“)
x = 4	Gleichung gelöst!

Anmerkung: Die „Zwischenzeile“ $\frac{3\cdot x}{3}=\frac{12}{3}$ muss nicht unbedingt geschrieben werden. Wenn klar ist, was herauskommt, darf ruhig auf Zeilen verzichtet werden

d. Gleichungen der Form a · x + b = c

Nun machen wir das Ganze etwas komplexer:

4x + 3 = 7	(Spruch: „Erst schieben (+ / -), dann dividieren (: bzw. ·)“).
4x + 3 = 7	/ - 3
4x + 3 – 3 = 7 – 3	ausrechnen!
4x = 4	/ : 4
$\frac{4x}{4}=\frac{4}{4}$	ausrechnen!
x = 1	Gleichung gelöst!

e. Tipps für „komplexere" Konstrukte

Ein paar Sprüche haben wir schon kennengelernt. Ein paar kommen nun noch dazu!

- Wenn Du etwas ausrechnen kannst, dann tu es! (Bsp.: $3x + 2 - 5x + 7 = 12 - 4x + 7$ ausrechnen)
- Erst schieben, dann dividieren! (Bsp.: $3x + 8 = 7x - 3$ erst + und - !)
- Wenn Dich Brüche nerven, dann rechne mal Nenner! (Bsp: $\frac{x}{4} = 3$ auf beiden Seiten mal 4!)
- Rechne nicht mehrere Schritte auf einmal! (Du könntest Dich verhaspeln!)
- Achte auf Vorzeichen und die Rechenregeln! (siehe Kapitel IIb: Rechengesetze)

f. Sonderfälle beim Lösen von Gleichungen

Wenn beim Lösen einer Gleichung alle Variablen wegfallen, und …

- … eine wahre Aussage herauskommt (z.B. 5 = 5), so ist JEDE Zahl der Grundmenge (meistens $\mathbb{R}$) eine Lösung der Gleichung, es gibt also unendlich viele.
- … eine falsche Aussage herauskommt (z.B. 3 = 7), so hat die Gleichung KEINE LÖSUNG.

g. Aufgaben

(1) Löse

(a) $4 \cdot x = 24$
(b) $12 \cdot x = 72$
(c) $7{,}5 \cdot a = 22{,}5$
(d) $5{,}5 \cdot c = 550$
(e) $-3 \cdot c = 27$
(f) $-1250 \cdot b = 125$

(2) Löse

(a) $2x + 3 = 12$
(b) $5x + 12 = 47$
(c) $12x - 5 = 19$
(d) $3 + 2x = 19$
(e) $9 + 3x = 9$
(f) $12 - x = 9$
(g) $17 - 2x = 21$
(h) $20 + 120x = 140$
(i) $0{,}5x - 12 = 15$

(3) Löse

(a) $2x - (4x - 3) = 1$
(b) $3 + 2x + (4x - 4) = 2x + 7$
(c) $3 \cdot (x + 4) = 21 - 3x + 9$
(d) $12 - (2x + 4) - 12 = 4x - 28$
(e) $2x + 12 - (x - 5) = 22 - 5x + 25$
(f) $0{,}5x + 3 - (x - 6 - (x - 6 - (x - 6))) = 6$

(4) Löse

(a) $3 \cdot (x + 7) = 4 \cdot (2x - 1)$
(b) $4 \cdot (5x - 3) + 6 = 10$
(c) $6{,}3x + 0{,}86 = 5{,}9$
(d) $3x + 10 + 2x - 8 = 3x + 15 - x - 4$
(e) $3x - (3 - 2x) = 12$
(f) $3 \cdot (2 - 4x) = 16 - 2x$
(g) $8 \cdot (3 + 2z) - 3z = 5z - 8$
(h) $5 \cdot (y - 0{,}2) = 1{,}6 \cdot (3y + 0{,}5)$
(i) $7 \cdot (x - 3) - 5 \cdot (2x - 15) = 3 \cdot (x - 2)$
(j) $15x - (3x - 2 \cdot (x + 3 \cdot (2x - 4)) + 30) - 24 = 0$
(k) $6x - 7 \cdot (11 - x) + 11 = 4x - 3 \cdot (20 - x)$
(l) $2x \cdot (x - 3) = x \cdot (2x + 4) - 80$
(m) $x \cdot (x + 3) = x^2 + 4 \cdot (x - 3)$
(n) $2x - (2 - 7x)^2 = (1 - 7x)(1 + 7x)$
(o) $(2y + 3)^2 = (5 - 2y)^2$
(p) $(3z - 1)^2 = (3z + 4)(3z - 5)$

h. *Lösungen*

(1) 6 ; 6 ; 3 ; 100 ; - 9 ; - 0,1
(2) 4,5 ; 7 ; 2 ; 8 ; 0 ; 3 ; - 2 ; 1 ; 54
(3) 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6
(4) 5 ; 0,8 ; 0,8 ; 3 ; 3 ; -1 ; -4 ; 9 ; 10 ; 3 ; 1 ; 8 ; 12 ; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}$; 7

VI. Prozentrechnen

a. Bestimmen von Anteilen

Du kennst sicher aus der Unterstufe noch die Formel: $A = \frac{G \cdot p}{100}$.

A Prozentanteil (das SIND die x %)
G Grundwert (davon gehen wir aus, das sind 100 %)
p Prozentsatz (so viele % sollen berechnet werden)

Diese Formel wollen wir nun benutzen, um einige Problemstellungen zu bearbeiten:
Eine typische Aufgabenstellung könnte sein: Berechne 30% von 200. Nun können wir in die Formel einsetzen: $A = 200 \cdot \frac{30}{100}$ = 60. Wir könnten das Ganze auch so schreiben: $200 \cdot 0{,}30 = 60$.

Vielleicht hast Du hier schon die Gesetzmäßigkeit erkannt: Beim Berechnen von 30% muss man einfach den Grundwert mit 0,30 multiplizieren. Das funktioniert auch mit anderen Zahlen:

Berechne 20% → · 0,20	Berechne 5% → · 0,05	Berechne 12,34% → · 0,1234
Berechne 25% → · 0,25	Berechne 0,5% → · 0,005	Berechne 130% → · 1,3
Berechne 17% → · 0,17	Berechne 0,331% → · 0,00331	Berechne 250% → · 2,5
Berechne 9% → · 0,09	Berechne 22,5% → · 0,225	Berechne 123,45% → · 1,2345

Allgemein: Um x % von G zu berechnen, rechne $G \cdot \frac{x}{100}$.

b. Erhöhen von Grundwerten

Oftmals ist es in der Finanzmathematik nötig, Beträge zu erhöhen (Steuern, Spesen,…). Das funktioniert nun ganz ähnlich wie oben. Eine Aufgabe könnte lauten: Erhöhe 200 Euro um 30%.

Nun überlegen wir: wenn ich einen Betrag um 30% erhöhe, so habe ich danach 130 (100 + 30) Prozent des ursprünglichen Wertes. Also könnte ich die Aufgabe „Berechne 130%“ lösen – was ich ja schon kann! 130% berechnen heißt ja Multiplikation mit 1,30, also: 200 · 1,30 = 260. Fertig.

Das Ganze geht auch mit anderen Zahlen sehr gut:

Erhöhe um 20% → · 1,20	Erhöhe um 9% → · 1,09	Erhöhe um 12,45% → · 1,1245
Erhöhe um 60% → · 1,60	Erhöhe um 3% → · 1,03	Erhöhe um 150% → · 2,50
Erhöhe um 25% → · 1,25	Erhöhe um 0,5% → · 1,005	Erhöhe um 125% → · 2,25
Erhöhe um 12% → · 1,12	Erhöhe um 0,005% → · 1,0005	Erhöhe um 200% → · 3,00

Allgemein: Um G um x % zu erhöhen, rechne $G \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$.

c. Vermindern von Grundwerten

Umgekehrt kann es auch notwendig sein, Beträge zu vermindern (Rabatt, Skonto, …). Wieder schauen wir uns dazu eine Aufgabe an: Vermindere 200 Euro um 30%.

Logischerweise bleiben, wenn man 30% abzieht, noch 70% des Ursprungsbetrages übrig. Die Aufgabe lautet also eigentlich „Berechne 70% von 200“. Auch hier wissen wir, wie das geht: 200 · 0,70 = 140.

Wieder wenden wir das Prinzip auf andere Zahlen an:

Vermindere um 20% → · 0,80	Vermindere um 12% → · 0,88	Vermindere um 0,1% → · 0,999
Vermindere um 60% → · 0,40	Vermindere um 9% → · 0,91	Vermindere um 0,05% → · 0,9995
Vermindere um 25% → · 0,75	Vermindere um 3% → · 0,97	Vermindere um 12,45% → · 0,8755

Allgemein: Um G um x % zu vermindern, rechne $G \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$.

d. Bestimmen von Grundwerten

Aufgabe: Man weiß, dass 20% eines Preises 15 Euro sind. Wie viel sind 100%?
Stellen wir uns die Situation mithilfe der Pfeilnotation rechts dar, so erhalten wir schnell die Ansatzgleichung: $x \cdot 0{,}20 = 15 \rightarrow x = 75$.
Die 100% waren also 75 Euro.

$$X \xrightarrow{\cdot 0{,}20} 15$$

Aufgabe: Ein Auto wurde um 20% verteuert und kostete dann 12000 Euro. Wie viel kostete das Auto vor der Preissteigerung?
Wieder gibt die Pfeilnotation schnell eine Gleichung vor:
$x \cdot 1{,}20 = 12000 \rightarrow x = 10000$. Das Auto kostete also direkt vor der Preissteigerung 10000 Euro.

$$X \xrightarrow{\cdot 1{,}20} 10000$$

Aufgabe: Ein Computer wurde um 5 % ermäßigt. Im Rahmen einer Aktion wurden von diesem ermäßigten Preis noch einmal 20% abgezogen. Der Computer kostete dann 12160 Euro. Wie hoch war der ursprüngliche Preis?

Wir erkennen bereits, dass diese Aufgabe ein bisschen komplexer ist, da hier zwei Rechengänge in einer Aufgabe stecken. Mit der Pfeilnotation ist aber alles immer gleich: $x \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}8 = 12160$. $x = 16000$.
Der Computer kostete ursprünglich 16000 Euro.

$$X \xrightarrow[(-5\%)]{\cdot 0{,}95} \xrightarrow[(-20\%)]{\cdot 0{,}8} 12160$$

e. Bestimmen von Prozentsätzen

Schlussendlich kann es noch notwendig sein, den Prozentsatz zu bestimmen. Auch das geht mit der Pfeilnotation sehr bequem.

Aufgabe: Wie viel % sind 20 von 150?
Wir stellen wieder eine Pfeilkette auf und erhalten die Gleichung $150 \cdot x = 20 \rightarrow x = 0{,}133333\ldots$
Wir wissen nun, dass mit dem Faktor 0,13333… multipliziert wurde, also entspricht der Prozentwert 13,3..% des Grundwerts.

$$150 \xrightarrow{\cdot x} 20$$

Aufgabe: Eine Ware wurde von 200 Euro auf 140 verbilligt. Wie viel Prozent sind das?
Mithilfe der Pfeilnotation rechts stellen wir wieder eine Gleichung auf: $200 \cdot x = 140 \rightarrow x = 0{,}70$. Wir wissen nun, dass offensichtlich mit 0,70 multipliziert wurde. Das heißt, die 140 Euro sind 70% des Ursprungsbetrags, was wiederum bedeutet, dass 30% abgezogen wurden.

$$200 \xrightarrow{\cdot x} 140$$

f. Komplexere Aufgaben

Betrachten wir folgendes Beispiel. Eine Aktie klettert im Verlauf eines Jahres um 3% nach oben, dann um 5% nach unten, dann wieder um 2% nach oben. Danach war sie 200 € wert.

(a) Wie viel war die Aktie zu Beginn des Jahres wert?
(b) Um wie viel % hat sich die Aktie insgesamt verbessert/verschlechtert?

Hier hilft uns wieder unsere Pfeilnotation:

$$X \xrightarrow[+3\%]{\cdot 1{,}03} \xrightarrow[-5\%]{\cdot 0{,}95} \xrightarrow[+2\%]{\cdot 1{,}02} 200$$

(a) Es ergibt sich die Gleichung $x \cdot 1{,}03 \cdot 0{,}95 \cdot 1{,}02 = 200$. Lösen liefert $x \approx 200{,}39$
(b) Wenn man die drei Faktoren in der Mitte zusammenmultipliziert (wir erinnern uns, dank des Assoziativgesetzes darf man bei der Multiplikation ja Pärchen bilden!), erhält man einen „Gesamtfaktor“ von 0,99807. Dies entspricht einer Gesamtveränderung von - 0,293%.

g. **Aufgaben**

(1) Berechne den angegebenen Prozentwert

a) 20% von 1000
b) 15% von 140
c) 25% von 240
d) 33% von 2000
e) 18% von 1500
f) 3,5% von 130
g) 8,55% von 2000
h) 12,3% von 1200
i) 93,5% von 19000
j) 0,54% von 1500
k) 0,05% von 12000
l) 123% von 1200
m) 215% von 2300
n) 101% von 3040
o) 125% von 2400
p) 185% von 1900
q) 124,5% von 2400
r) 0,0005% von 300000
s) 0,002% von 24000
t) 123,45% von 12345
u) 94,5% von 1200

(2) Erhöhe um den angegebenen Prozentsatz

a) 1500 um 25%
b) 1800 um 12%
c) 1900 um 35%
d) 500 um 8%
e) 1200 um 9%
f) 15000 um 21%
g) 1200 um 12,5%
h) 9440 um 1,5%
i) 9500 um 8,15%
j) 12000 um 12,34%
k) 3500 um 120%
l) 2990 um 150%
m) 4000 um 180%
n) 1250 um 250%
o) 45000 um 0,05%
p) 10000 um 0,001%
q) 2500 um 3,5%
r) 120 um 123,456%

(3) Vermindere um den angegebenen Prozentsatz

a) 15000 um 25%
b) 12000 um 12%
c) 1900 um 30%
d) 4000 um 5%
e) 3500 um 2%
f) 15000 um 9%
g) 9500 um 0,5%
h) 3500 um 0,1%
i) 9000 um 0,3%
j) 150000 um 0,05%
k) 125000 um 0,02%
l) 120000 um 0,01%
m) 230000 um 12,5%
n) 2000 um 1,25%
o) 29000 um 15,55%

(4) Bestimme jeweils den Grundwert – runde ggf. auf zwei Dezimalen!

a) 1250 sind 45%
b) 1900 sind 20%
c) 12000 sind 15%
d) 15000 sind 9%
e) 120 sind 2%
f) 950 sind 5%
g) 12 sind 0,5%
h) 150 sind 0,2%
i) 200 sind 0,4%
j) 10 sind 0,01%
k) 15 sind 0,03%
l) 20 sind 0,08%
m) 15 sind 12,5%
n) 20 sind 12,34%
o) 15 sind 9,54%

(5) Bestimme den Grundwert – runde ggf. auf zwei Dezimalen!

a) Nach 15% Erhöhung waren es 1500.
b) Nach 25% Erhöhung waren es 2000.
c) Nach 30% Erhöhung waren es 1500.
d) Nach 15% Verminderung waren es 2500.
e) Nach 50% Verminderung waren es 1250.
f) Nach 25% Verminderung waren es 9000.
g) Nach 5,5% Erhöhung waren es 1560.
h) Nach 3% Erhöhung waren es 1560.
i) Nach 3,2% Erhöhung waren es 1245.
j) Nach 23,5% Verminderung waren es 665.
k) Nach 9,125% Verminderung waren es 150.
l) Nach 12,54% Verminderung waren es 250.
m) Nach 125% Erhöhung waren es 12550.
n) Nach 130% Erhöhung waren es 19000.
o) Nach 250% Erhöhung waren es 12500.
p) Nach 125,5% Erhöhung waren es 12000.

(6) Bestimme den Prozentsatz – runde ggf. auf zwei Dezimalen!

a) 250 von 1000
b) 120 von 2000
c) 350 von 1500
d) 12 von 3500
e) 0,5 von 2000
f) 2 von 13000
g) 23500 von 120000
h) 2100 von 1400
i) 9000 von 12000
j) 12 von 120000
k) 8 von 2500
l) 12,5 von 350

(7) Bestimme den Prozentsatz um den erhöht/vermindert wurde.

a) Erhöhung von 150 auf 200
b) Erhöhung von 12 auf 18
c) Erhöhung von 125 auf 190
d) Verminderung von 2000 auf 1400
e) Verminderung von 2100 auf 1600
f) Verminderung von 120 auf 85
g) Erhöhung von 125 auf 290
h) Erhöhung von 300 auf 380

(8) Kaufmann B. Deutungslos erklärt: „Die 10%-Rabatte auf alle Lebensmittel von letzter Woche sind völlig sinnlos. Wir werden den Preis wieder um 10% erhöhen, dann ist alles wieder beim Alten!" Beweise mithilfe einer Rechnung, dass B. Deutungslos einen schweren Fehler begangen hat.

(9) Eine Verkäuferin bekommt nach Abzug von 30 % Abgaben 1400 € Nettogehalt ausgezahlt. Wie hoch ist das Bruttogehalt?

(10) Prof. Tunichtgut muss heuer statt 20 Stunden 23,5 Stunden unterrichten. Bestimme, um wie viel Prozent sich die Lehrverpflichtung dadurch erhöht hat.

(11) Ein Sofa wird um 2.000 Euro angeboten. Nach dem Zuschlag der 20%igen MwSt. werden 50% Rabatt abgezogen. Wie viel kostet das Sofa jetzt?

(12) Eine Kundin kauft in einem Sportgeschäft einen Heimtrainer zum Preis von 400 €. Sie bekommt eine Ermäßigung und zahlt nur 380€. Wie viel % betrug der Preisnachlass?

(13) Kaufmann B. Trüger hat heute ein super Angebot für Dich! Wir haben heute unser ohnehin schon um 30% reduziertes Handy nochmal um 20% verbilligt. Kaufmann R. Edlich bietet das Handy um den vom gleichen Grundpreis um 50% reduzierten Preis an. Wo würdest Du kaufen? Begründe mithilfe der Prozentrechnung!

(14) Ein Auto wurde zunächst um 10% reduziert und danach mit 20% besteuert. Danach kostet es 15.000 Euro. Wie lautet der ursprüngliche Preis?

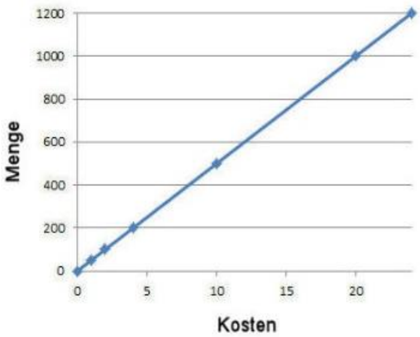
(15) Was wäre dir lieber? Begründe Deine Antwort mithilfe einer Rechnung!
O …wenn die Jause erst um zehn Prozent billiger und danach um zehn Prozent teurer wird.
O … wenn die Jause erst um zehn Prozent teurer und danach um zehn Prozent billiger wird.
O … es macht mathematisch keinen Unterschied!

h. **Lösungen**

(1) 200 ; 21 ; 60 ; 660 ; 270 ; 4,55 ; 171 ; 147,6 ; 17765 ; 8,1 ; 6 ; 1476 ; 4945 ; 3070,4 ; 3000 ; 3515 ; 2988 ; 1,5 ; 0,48 ; 15239,9025 ; 1134
(2) 1875 ; 2016 ; 2565 ; 540 ; 1308 ; 18150 ; 1350 ; 9581,6 ; 10274,25 ; 13480,8 ; 7700 ; 7475 ; 11200 ; 4375 ; 45022,5 ; 10000,1 ; 2587,5 ; 268,1472
(3) 11250 ; 10560 ; 1330 ; 3800 ; 3430 ; 13650 ; 9452,5 ; 3496,5 ; 8973 ; 149925 ; 124975 ; 119988 ; 201250 ; 1975 ; 24490,5
(4) 2777,78 ; 9500 ; 80000 ; 166666,67 ; 6000 ; 19000 ; 2400 ; 75000 ; 50000 ; 100000 ; 50000 ; 25000 ; 120 ; 162,07 ; 157,23
(5) 1304,35 ; 1600 ; 1153,85 ; 2941,18 ; 2500 ; 12000 ; 1478,67 ; 1514,56 ; 1206,40 ; 869,28 ; 165,06 ; 285,84 ; 5577,78 ; 8260,87 ; 3571,43 ; 5321,51
(6) 25 ; 6 ; 23,33 ; 0,34 ; 0,03 ; 0,02 ; 19,58 ; 150 ; 75 ; 0,01 ; 0,32 ; 3,57
(7) +33,33 ; +50 ; +52 ; -30 ; -23,81 ; -29,17 ; +132 ; +26,67
(8) Beispiel: $100 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}1 = 99$. Die Preise sind insgesamt also um 1% gesunken.
(9) 2000 Euro
(10) + 17,5%
(11) 1200
(12) 5%
(13) Verbilligung um 30 und 20% = $x \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = x \cdot 0{,}56$ (= Verbilligung um 44%). Verbilligung um 50% ist daher besser für den Käufer.
(14) 13888,89
(15) Es macht keinen Unterschied, da die Multiplikation $x \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}1$ ja kommutativ ist!

VII. Schlussrechnen

a. Direkte Proportionalität



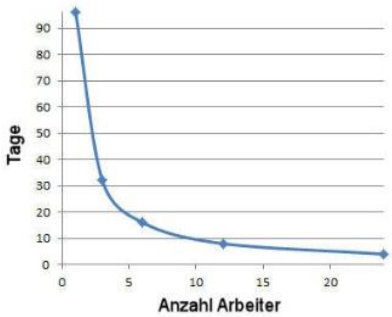
Definition: Zwei Größen heißen dann direkt proportional, wenn das Verdoppeln, Verdreifachen,… der einen Größe zu einer Verdoppelung, Verdreifachung,… der anderen Größe führt.

Beispiele:

- 1 Apfel kostet 0,50, dann kosten fünf Äpfel auch fünf mal so viel.
- 12 Liter Benzin kosten 18 Euro, dann kostet ein Liter (Anzahl durch 12) genau 1,50 (Preis auch durch 12)

Allgemein: $y = k \cdot x$ (k nennt man hier „Proportionalitätsfaktor")
Merkspruch: „Je mehr … desto mehr …. bzw. je weniger … desto weniger …".

b. Indirekte Proportionalität



Definition: Zwei Größen heißen dann indirekt proportional, wenn das Verdoppeln, Verdreifachen,… der einen Größe zu einer Halbierung, Drittelung… der anderen Größe führt.

Beispiele:

- Eine Kuh kommt 12 Tage mit dem Futter aus, dann kommen 6 Kühe (mal 6) nur 2 Tage (durch 6) aus.
- Mit 120km/h Geschwindigkeit braucht man 2 Stunden für eine Fahrt. Mit 60km/h (durch 2) würde man 4 Stunden (mal 2) brauchen.

Allgemein: $y = \frac{k}{x}$
Merkspruch: „Je mehr … desto weniger …. bzw. je weniger … desto mehr …".

c. Konkrete Rechenaufgaben

Grundsätzlich löst man Schlussrechnungsbeispiele immer so, dass man die beiden Größen, um die es geht, gegenüberstellt. Es spielt dabei eine große Rolle, ob die beiden Größen dabei direkt oder indirekt proportional sind. Schauen wir uns nun ein Beispiel mit direkter und ein Beispiel mit indirekter Proportionalität an:

4 Bananen kosten € 2,40 – wie viel kosten 9 Bananen?

4 Bananen	€ 2,40	/ auf beiden Seiten durch 4 dividieren
1 Banane	€ 2,40 / 4	/ auf beiden Seiten mit 9 multiplizieren
9 Bananen	€ 2,40 / 4 · 9 = € 5,40	/ ausrechnen, fertig!

6 Arbeiter brauchen für ein Straßenstück 4 Tage, wie lange würden 8 Arbeiter brauchen?

6 Arbeiter	4 Tage	/ links durch 6, also rechts mal 6
1 Arbeiter	4 · 6 Tage	/ links mal 8, also rechts durch 8
8 Arbeiter	4 · 6 / 8 Tage = 3 Tage.	/ ausrechnen, fertig!

Folgende Vorgehensweise scheint also zielführend zu sein:
Schritt 1: Entscheide mit den Merksprüchen, ob direkte oder indirekte Proportionalität vorliegt.
Schritt 2: Schreibe alle Informationen und die Aufgabe aus der Angabe systematisch in Tabellenform auf.
Schritt 3: Führe auf der Seite, auf der Du alles kennst, durch geschicktes Rechnen auf 1 zurück.
Schritt 4: Beachte, dass bei direkter Proportionalität immer auf beiden Seiten dieselbe, bei indirekter Proportionalität auf beiden Seiten die gegenteilige Operation passieren muss.
Schritt 5: Multipliziere / Dividiere nochmals, sodass die Aufgabe gelöst ist. Vergiss nicht auf die Antwort!

d. **Aufgaben**

(1) Vier Hosen kosten im Handel € 96,-. Wie viel würden drei Hosen kosten?
(2) Sechs Sanitäter desinfizieren ein Rettungsauto in 36 Minuten. Wie lange würden 4 Sanitäter brauchen?
(3) Ein Auto benötigt für eine bestimmte Strecke bei einer mittleren Geschwindigkeit von 60 km/h 20 Minuten. Wie lange dauert die Fahrt, wenn die mittlere Geschwindigkeit auf 80 km/h erhöht wird?
(4) 40 Minuten Lernen für einen Test bringt 10 Punkte. Wie lange müsste man lernen, wenn 15 Punkte für eine positive Beurteilung erforderlich sind?
(5) Ein Bus hat für eine Strecke von 231 km 3,5 h benötigt. Welche Strecke legt er in 1,5 h zurück?
(6) Wenn 20 Leute auf einer Alm sind, reichen die Vorräte für 12 Tage. Wie lange würden die Vorräte reichen, wenn 5 Leute abreisen?
(7) Verteilt man eine Summe gleichmäßig unter 18 Personen, so erhält jede Person 45,60 €. Wie viele erhält jede Person, wenn 20 Leute den Betrag teilen?
(8) 6 Eier im Topf brauchen 6 Minuten um weich zu kochen, wie lang würden 8 Eier brauchen?
(9) Am Sporttag erhält jeder der 160 Schülerinnen und Schüler 0,8 Liter Tee. Wie viel könnte jeder der Schüler/innen trinken, wenn 120 Schüler/innen teilnehmen würden?

(10)
In einem Betrieb arbeiten 12 Personen an einem Projekt. Sie würden unter normalen Umständen dafür 14 Tage brauchen. Nach 4 Tagen werden 7 Personen für ein anderes Projekt abgezogen.
(a) Wie lange brauchen die restlichen Personen noch für die restliche Arbeit?
(b) Wie lange dauert das Projekt nun in Summe.
(c) In der Praxis werden oft sogenannte „Personaleinheiten“ verrechnet. Wenn eine Person einen Tag arbeitet, ergibt dies eine Personaleinheit. Wie viele Personaleinheiten müssen verrechnet werden?
(d) Wie viel kostet das gesamte Projekt, wenn zusätzlich zu den Personaleinheiten (á 120 €) noch 25% Gewinnmarge und 20% Steuer verrechnet werden müssen?

(11)
Auf einer Baustelle werden zum Abtragen von Erdreich Bagger benötigt. Drei Bagger würden zu Ausheben eines Erdlochs 24 Arbeitsstunden benötigen.
(a) Wie lange würden 4 Bagger benötigen?
(b) Wie viele zusätzliche Bagger würde man brauchen, wenn man in 4 Arbeitsstunden fertig sein muss?
(c) Nach 12 Stunden fällt ein Bagger aus. Wie viele Arbeitsstunden müssten die anderen Bagger nun noch arbeiten, um das Erdloch fertigzustellen?

(12)
250g pures Gold werden für 10.000 Euro angeboten.
(a) Der Preis am Goldmarkt wird oft in „Feinunzen“ angegeben. Eine Feinunze entspricht etwa 31,1g. Wie lautet also der Preis für eine Feinunze Gold?
(b) Wie viele Gramm Gold würde man für 12.500 Euro bekommen?

(13)
Erkläre in eigenen Worten noch einmal den Unterschied zwischen direkter und indirekter Proportionalität. Gehe insbesondere auf die grafische Darstellung der zugehörigen Funktionsgraphen ein.

(14)
Fließen stündlich in ein Badebecken 3600 Liter Wasser ein, so ist das Becken in 90 Stunden voll. Wie lange dauert die Füllung, wenn pro Stunde 4000 Liter Wasser zufließen?

e. **Lösungen**

(1) 72 (2) 54 (3) 15 (4) 168 (5) 99 (6) 16 (7) 41,04 (8) Auch 6 Minuten, hihi :) (9) 1,066…
(10) 24 Tage ; 28 Tage ; 168 Personaleinheiten ($4 \cdot 12 + 5 \cdot 24$) ; 30240
(11) 18 ; 15 zusätzliche Bagger ; noch 18 Stunden (12) 1244 ; 312,5g
(13) siehe Lernstoff in den obigen Kapiteln. (14) 81